Algèbre linéaire - MATH111(f)
Semestre d'automne — 2025-2026

Série 12: Produits scalaires

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) connaître la **définition de produit scalaire**, ainsi que quelques propriétés ;

(O.2) **déterminer si une application est un produit scalaire** ;

(O.3) **calculer des produits scalaires**, **vérifier si des éléments sont orthogonaux** ;

(O.4) **calculer des compléments orthogonaux**, et **prouver des propriétés fondamentales**.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- produit scalaire (abstrait)
- produit scalaire usuel
- norme associée à un produit scalaire
- distance entre deux vecteurs
- vecteur unitaire
- vecteurs orthogonaux
- famille orthogonale
- famille orthonormée
- complément orthogonal

Noyau d'exercices

1.1 Produits scalaires

Exercice 1 (Premières propriétés)
Soient

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

dans $\mathbb{R}^n$ On rappelle que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in \mathbb{R}$$

est le **produit scalaire usuel** de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$;
(b) $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$;
(c) $(\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v})$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$;
(d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ si et seulement si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Exercice 2 (Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ associé à une matrice inversible)
On rappelle que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$ désigne le **produit scalaire usuel** de $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est inversible, alors l'application $(\ |\ ) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = (A\mathbf{u}) \cdot (A\mathbf{v})$$

pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est un produit scalaire.

Exercice 3 (Produits scalaires sur $\mathbb{P}_n$)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que l'application $(\ |\ ) : \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$(p|q) = \int_a^b p(t)q(t)dt$$

pour tous $p, q \in \mathbb{P}_n$ est un produit scalaire.

1.2 Norme, distance et orthogonalité

Exercice 4 (Calculs du produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$)
On considère le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

(a) Trouver un vecteur non nul orthogonal à

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Soient

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, ainsi que

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||}, \ \frac{1}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\mathbf{w} \text{ et } \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}.$$

(c) Calculer la distance entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, et la distance entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$.
(d) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$, pointant dans la même direction que le vecteur original.

Exercice 5 (Famille orthogonale dans $\mathbb{P}_n$)
On considère le produit scalaire $(\ |\ ) : \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}$ donné par

$$(p|q) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$$

pour tous $p, q \in \mathbb{P}_n$. Montrer que la famille $\mathscr{F} = \{1, t, 1-3t^2\}$ est orthogonale, mais pas orthonormée. Est-ce que $\mathscr{F}$ est libre ?

1.3 Complément orthogonal

Exercice 6 (Complément orthogonal dans $\mathbb{R}^3$)
Soit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'ensemble W formé des vecteurs orthogonaux à $\mathbf{v}$. Est-ce un espace vectoriel ? Si oui, de quelle dimension ?

Exercice 7 (Complément orthogonal)
Soit $(\ |\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur un espace vectoriel V et soir $S \subseteq V$ une partie non vide. Montrer que

$$S^\perp = \left\{ v \in V : (v|s) = 0 \text{ pour tout } s \in S \right\} \subseteq V$$

est un sous-espace vectoriel de V, que l'on appelle le sous-espace vectoriel **orthogonal** à S.

Pour compléter la pratique

2.1 Produits scalaires

Exercice 8 (Produit scalaire sur $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$)
Montrer que l'application $(\ |\ ) : \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$(A|B) = \mathsf{Tr}(A^\mathrm{T} B)$$

pour toutes les matrices $A, B \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ est un produit scalaire.

2.2 Norme, distance et orthogonalité

Exercice 9 (Famille non orthogonale dans $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$)
On considère le produit scalaire $(\ |\ ) : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donné par

$$(A|B) = \mathsf{Tr}(A^\mathrm{T} B)$$

pour toutes les matrices $A, B \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Montrez que la famille

$$\mathscr{F} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{B}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}}_{C} \right\}$$

n'est pas orthogonale. Est-ce que $\mathscr{F}$ est libre ? Calculer $||A||^2$, $||B||^2$ et $||C||^2$.

2.3 Complément orthogonal

Exercice 10 (Dimension du complément orthogonal)
Soient W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q\} \subseteq W$ une base de W. Montrer que

$$\mathrm{dim}(W) + \mathrm{dim}(W^\perp) = n.$$